

Ejercicio 1. Si C es la curva de la familia de soluciones y = y (x) de la ecuación diferencial dada por $x\,y' - 2y = 3x$ que pasa por $P_1 = (1, 0)$, calcular la circulación del campo vectorial $\bar{h}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *tal que* $\bar{h}(x, y) = (y + 3x, -x)$ a lo largo del trozo C* de la curva C desde P_1 hasta $P_2 = (2, 6)$.

La ecuación diferencial lineal de primer orden, con factor integrante $\mu(x) = x^{-2}$, es equivalente en cualquier intervalo que no contenga a x = 0 a la ecuación diferencial $x^{-2}\,y' - 2\,x^{-1} y = 3\,x^{-2}$, esto es $[x^{-2}\,y]' = 3\,x^{-2}$ de donde $x^{-2}\,y = -3\,x^{-1} + k$; con la condición inicial y(1) = 0 resulta k = 3. Esto es que la (única) solución que pasa por P_1 es[i] la función y: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $y(x) = 3x^2 - 3x$. Para el cálculo de la circulación, una parametrización inyectiva regular[ii] del trozo orientado C* de la curva C es la función vectorial $\bar{\gamma}: [1, 2] \to \mathbb{R}^2$ tal que $\bar{\gamma}(t) = (t,\ 3t^2 - 3t)$, con velocidad $\bar{\gamma}': [1, 2] \to \mathbb{R}^2$ tal que $\bar{\gamma}'(t) = (1,\ 6t - 3)$. Finalmente, la circulación pedida consiste en el siguiente cálculo inmediato[iii].

$$\int_{C*} \bar{h} \cdot \bar{dl} \overset{\text{def}}{=} \int_1^2 \bar{h}\big(\bar{\gamma}(t)\big) \cdot \bar{\gamma}(t)dt = \int_1^2 (3t^2, -t) \cdot (1, 6t - 3)dt = 3\int_1^2 (-t^2 + t)dt = -\frac{5}{2}$$

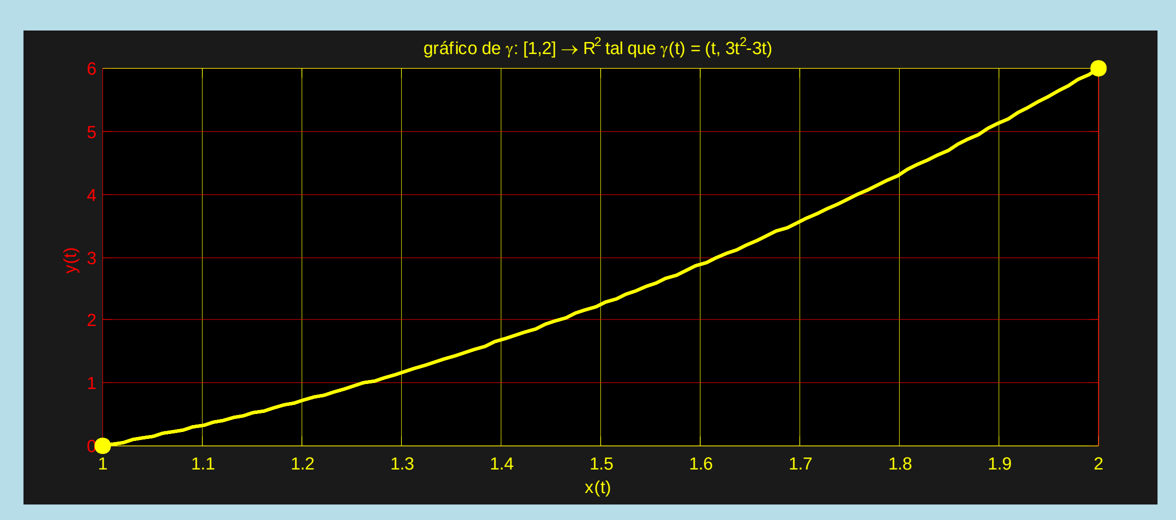


Ilustración 1. El gráfico de la solución que pasa por los puntos P_1 y P_2

Ejercicio 2. Sea $\bar{g}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *tal que* $\bar{g}(x, y) = 2p(x, y)\nabla p(x, y) + (p_y(x, y), p_x(x, y))$, siendo p el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $P_0 = (1, 2)$ de un campo escalar $f \in C^3(\mathbb{R}^2)$, cuya matriz hessiana en P_o es $H_f(P_0) = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$. Calcular la circulación del campo vectorial $\bar{g}$ sobre la elipse C, de ecuación $4x^2 + y^2 = 4y$, recorrida en sentido negativo.

Observamos en primer lugar que las componentes del campo vectorial $\bar{g}$ son polinomios y por ello, $\bar{g} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Podemos escribir de un modo más compacto que $\bar{g}(x, y) = \nabla[p^2(x, y)] + (p_y(x, y), p_x(x, y))$, lo que aligera el trabajo, puesto que la circulación del primer sumando es nula[iv], restando sólo calcular la circulación sobre C del segundo sumando $\bar{h}(x, y) = (p_y(x, y), p_x(x, y))$, que es un campo vectorial $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. La elipse C de ecuación $4x^2 + y^2 = 4y$, o lo que es lo mismo, $x^2 + (y-2)^2/4 = 1$, es la frontera de la región $\mathcal{R} \overset{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2 + (y-2)^2/4 \leq 1\}$, de modo que tenemos satisfechas las condiciones del teorema de Green, si orientamos C positivamente. Llamando $P(x, y) \overset{\text{def}}{=} p_y(x, y)$, $Q(x, y) \overset{\text{def}}{=} p_x(x, y)$, podemos escribir:

$$\int_C \bar{h} \cdot \bar{dl} = \iint_{\mathcal{R}} [Q_x(x, y) - P_y(x, y)]\,dx\,dy$$

Pero como $Q_x(x, y) = p_{xx}(x, y), P_y(x, y) = p_{yy}(x, y)$, y sabemos que el polinomio p es de segundo grado, las funciones anteriores son constantes, de manera que en cualquier punto (x, y) toman el mismo valor que en, por ejemplo, P_0, valores

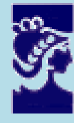
---

[i] La solución está definida, *a posteriori*, para todo $\mathbb{R}$, incluyendo el punto x = 0, como es inmediato de verificar, reemplazando la función $y'(x) = 6x - 3$ en la ecuación diferencial, resultando que $\forall x \in \mathbb{R}$: $x\,y' - 2y = x\,(6x - 3) - 2\,(3x^2 - 3x) = 6x^2 - 6x^2 - 3x + 6x = 3x$. Además, observar que la solución pasa efectivamente por el punto P_1, puesto que y(2) = 6.

[ii] Es obvio que $\bar{\gamma}$ es C^∞ en su dominio (sus componentes son polinomios), y además si $\bar{\gamma}(t_1) = \bar{\gamma}(t_2)$, esto es, si $(t_1,\ 3t_1^2 - 3t_1) = (t_2,\ 3t_2^2 - 3t_2)$ es necesariamente que $t_1 = t_2$, de modo que $\bar{\gamma}$ es inyectiva en su dominio; finalmente, es inmediato que para ningún valor de t el vector $\bar{\gamma}'(t) = (1,\ 6t - 3)$ es nulo. La orientación es evidente, con $\bar{\gamma}(t_1) = P_1$, $\bar{\gamma}(t_2) = P_2$.

[iii] Operativamente, el ejercicio es una secuencia de dos cálculos: la solución del problema de valor inicial, el cálculo de la integral. La carga conceptual descansa sobre el reconocimiento del tipo de ecuación diferencial, la cuidadosa determinación del intervalo en el que se halla definida la (única) solución del problema de valor inicial, la prolija parametrización regular inyectiva que orienta el trozo de curva pedido, y las justificaciones correspondientes.

[iv] Damos por conocido que la circulación de un campo de gradientes, definido en un abierto simplemente conexo D, sobre un lazo incluido en D, es nula. Este es el caso de nuestro ejercicio, en que el primer sumando es gradiente del campo escalar p^2, definido en todo $\mathbb{R}^2$, que ciertamente es un abierto simplemente conexo.



que se conocen por la matriz Hessiana de f en ese punto[v], de modo que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$: $Q_x(x,y) - P_y(x,y) = 3 - 1 = 2$. Ahora, como el integrando es constante, se tiene que la circulación (sentido positivo) es el doble del área del recinto $\mathcal{R}$, que podemos dar por sabido que es π por el producto de los semiejes, esto es que la circulación es 4π. Finalmente, como la circulación pedida es en sentido antihorario[vi], su valor será -4π[vii].

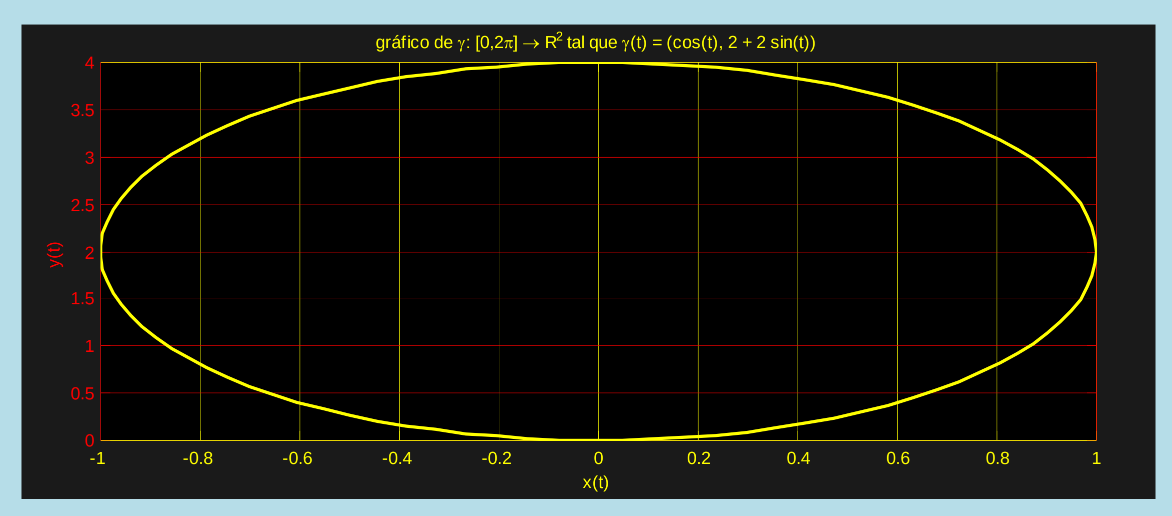


Ilustración 2. La elipse sobre la que se pide la circulación

Ejercicio 3. $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + yz$ representa, en grados centígrados, la temperatura en cualquier punto (x, y, z) de la curva C dada por las ecuaciones $2x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $z = y$, contenida en $\mathbb{R}^3$. Determinar los puntos más fríos y los puntos más calientes de la curva, y la temperatura en cada uno de ellos.

La curva C, intersección entre el elipsoide y el plano es $C = \{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3: x^2 + y^2 = 1, z = y\}$, que puede se parametrizada regularmente por $\overline{\gamma}: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ tal que $\overline{\gamma}(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), \operatorname{sen}(t))$, de modo que el problema consiste en hallar los extremos de la función escalar h en un compacto, esto es $h: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ tal que $h(t) \stackrel{\text{def}}{=} T(\overline{\gamma}(t)) = 1 + \operatorname{sen}^2(t)$. Siendo tan sencilla la función, basta decir que su valor mínimo es 1 (en $t_1 = 0$, $t_2 = \pi$, $t_3 = 2\pi$) y su valor máximo es 2 (en $t_4 = \pi/2$, $t_3 = 3\pi/2$), de modo que los puntos más fríos, a temperatura 1, son $P_{f1} = h(t_1) = h(t_3) = (1, 0, 0)$ y $P_{f2} = h(t_2) = (-1, 0, 0)$, mientras que los más calientes, a temperatura 2, son $P_{c1} = h(t_4) = (0, 1, 1)$ y $P_{c2} = h(t_5) = (0, -1, -1)$[viii].

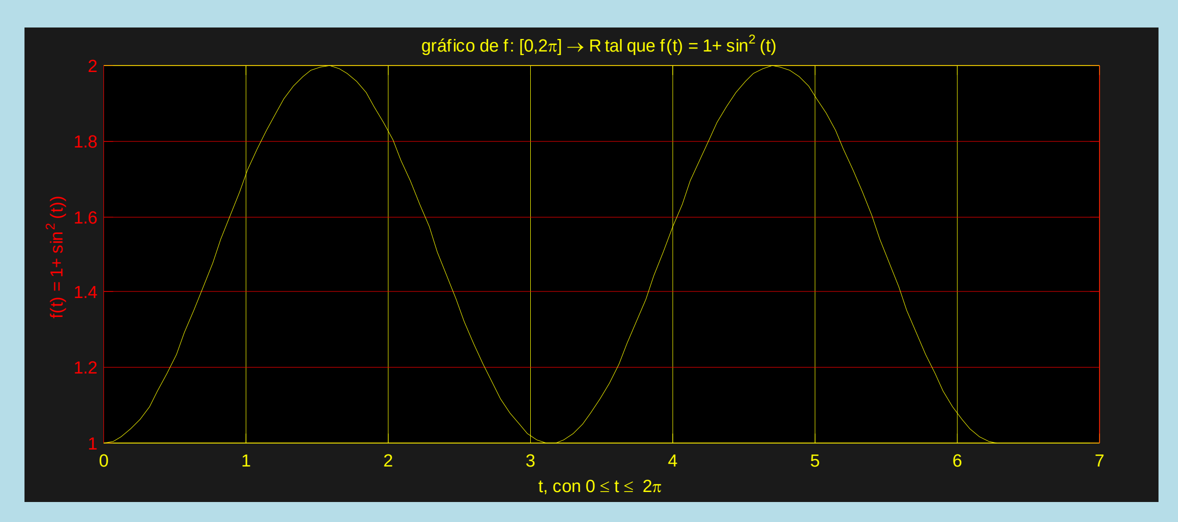


Ilustración 3. La función escalar $h: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ tal que $h(t) = 1 + \operatorname{sen}^2(t)$

---

[v] Estamos aquí utilizando que las derivadas de orden n-ésimo de un campo escalar de clase C^{n+1} valuadas en un punto P_0 de su dominio coinciden con las correspondientes de su polinomio de Taylor de orden n desarrollado en ese punto. También suponemos conocida la definición de la matriz Hessiana en el punto P_0, que nos permite recuperar la información de los valores las derivadas segundas en ese punto.

[vi] Se acepta como conocido que la inversión de la orientación cambia el signo de la circulación. Si, por otra parte, se quiere calcular de manera autónoma el área del interior de la elipse puede verse dos modos de hacerlo en la guía de trabajos prácticos de la asignatura.

[vii] Desde el punto de vista operativo, este ejercicio es demasiado simple: sólo hay que multiplicar por 2 el área del interior de una elipse. La carga conceptual, en cambio, no lo es: procede de reconocer el grado de regularidad de los campos que intervienen, el conocimiento del teorema de Green (esto es qué dice precisamente y si el caso del ejercicio cae dentro de su alcance), y sobre todo, el punto de observar que el integrando de la integral doble es una función constante.

[viii] Alternativamente, el problema puede plantearse como el de extremar un campo escalar de tres variables sujeto a dos restricciones suaves, para lo que puede emplearse el método de Lagrange. Sin embargo, su resolución es más 'pastosa'; en cierto sentido, podría decirse que es un desperdicio aplicar un método tan potente a un problema tan simple. 🔔 Observación, sugerida por la frecuencia del error constatada: al buscar extremos de una función escalar en un intervalo cerrado, no debe descuidarse examinar la frontera del intervalo, pues allí podría alcanzarse (como se alcanza aquí) algún extremo.

Podemos hacer un gráfico que aumente nuestra percepción de lo que sucede con la temperatura, una suerte de gráfico 4D, asignando a cada punto un color de acuerdo a su temperatura. Por ejemplo, rojo es calor, azul frío, y luego interpolar. El siguiente es un gráfico de ese tipo, en la que se puede observar la cinta negra (es la curva restricción), los puntos detectados (son de color blanco) y también se observa queestos puntos no son los más fríos o calientes de *toda* la esfera, sino sólo los de *esa* curva restricción.

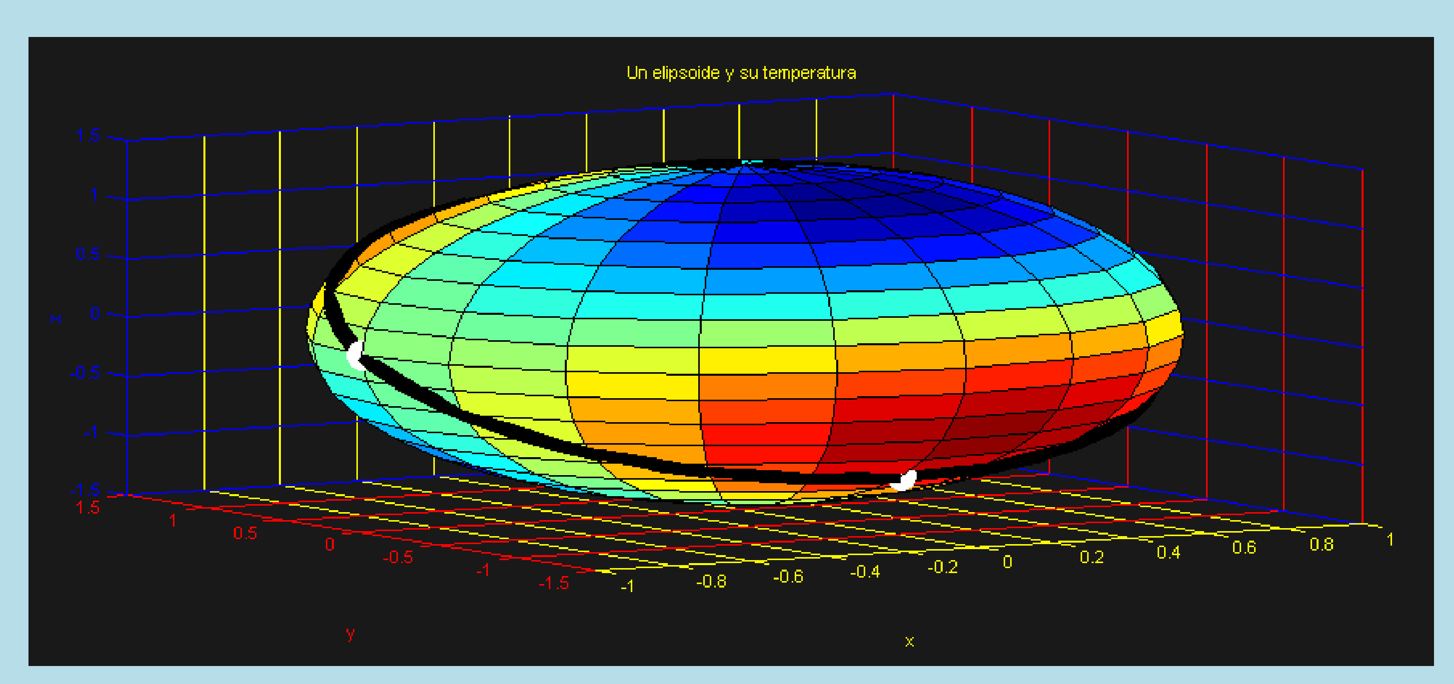


Ilustración 4. Un gráfico 4D, con los colores indicando la temperatura

Ejercicio 4. Sea el macizo $M = \{(, x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que: $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le y\}$, S_0 la cara de M contenida en el plano de ecuación $x = 1$, S_1 la unión de las restantes cuatro caras de la cuña M. Sea $\bar{g}$ un campo $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$, del que $\bar{h}$ es su rotor para algún $k \in \mathbb{R}$, siendo $\bar{h}(x, y, z) = (2, y^2 + 2z, k\,y\,z)$. Determinar k y la circulación de $\bar{g}$ sobre el borde C de S_1 indicando en un gráfico la orientación adoptada.

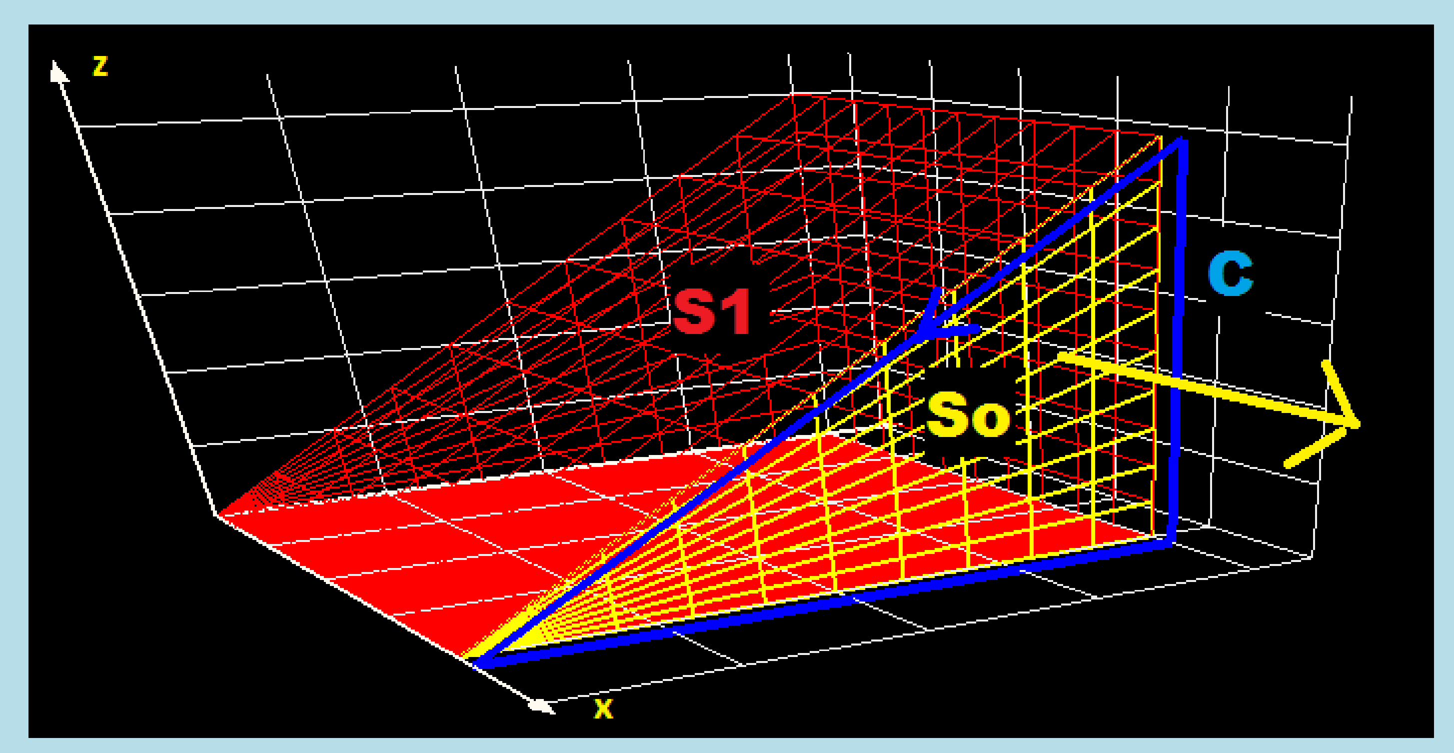


Ilustración 5. Las caras del macizo M, y las orientaciones de la curva C y la superficie S_0



Dado que un campo de rotores es necesariamente solenoidal[ix], podemos determinar k exigiendo que la divergencia de $\bar{h}$ sea idénticamente nula en $\mathbb{R}^3$, esto es: $\forall(x, y, z)\in\mathbb{R}^3$: $2y + ky = y\ (2+k) = 0$. Puesto que debe valer para todo y, en particular debe valer cuando $y = 1$, esto es debe ser $k + 2 = 0$, de modo que es $k = -2$. La circulación de $\bar{g}$ sobre el borde C de S_1 (un lazo simple regular a trozos) es igual al flujo de su rotor $\bar{h}$ a través de una superficie regular (no necesariamente S_1) que tenga ese borde, con las orientaciones concordadas según Stokes[x]. Si adoptamos como S_0 a tal superficie, es claro que una parametrización regular de S_0 es $\bar{T}$: $\mathcal{R} \to \mathbb{R}^3$ tal que $\bar{T}(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} (1, u, v)$, con $\mathcal{R} \stackrel{\text{def}}{=} \{(u, v)\in\mathbb{R}^2: 0\leq u\leq 1, 0\leq v\leq u\}$, con campo de normales $\bar{N}(u, v) = \bar{T}_u(u, v) \times \bar{T}_v(u, v) = (1, 0, 0)$. Entonces, podemos escribir, según el teorema de Stokes:

$$\int_C \bar{g}\cdot \overline{dl} = \iint_{S_0} \bar{h}\cdot \check{n}\, dS = \iint_{\mathcal{R}} \bar{h}\big(\bar{T}(u,v)\big)\cdot \bar{N}(u,v)dudv = \iint_{\mathcal{R}} (2, u^2+2v, -2uv)\cdot(1,0,0)dudv = 2\iint_{\mathcal{R}} du\,dv = 1$$

De este modo, respondemos que la circulación pedida, sobre C orientada como indica la figura, es 1[xi].

Ejercicio 5. Sea $S = \{(x, y, z)\in\mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2, (x-a)^2 + y^2 \leq a^2, z>0\}$. (a) Graficar y calcular el área de S. (b) Si $\bar{X} = (x, y, z)$, y $r = \|\bar{X}\|$, calcular el flujo del campo vectorial $\bar{h}$: $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3$ tal que $\bar{h}(\bar{X}) = (k/r^3)\ \bar{X}$, con $k\in\mathbb{R}$, a través de la superficie S orientada con el campo de normales $\bar{N}$ tales que $\bar{N}(X)\cdot(0, 1, 0) > 0$.

(a) La superficie, conocida como *bóveda de Viviani*, se obtiene como la intersección de la semiesfera esfera centrada en el origen de radio 2a, con el cilindro excéntrico macizo de radio a, tal como lo indica la figura. Dado que la superficie S está contenida en el conjunto de nivel 0 del campo escalar φ: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 + y^2 + z^2 - 4a^2$. Para todo punto (x, y, z) de la superficie S es $\|\varphi(x, y, z)\| = \|(2x, 2y, 2z)\| = 2\|(x, y, z)\| = 2\ (2a)$, de modo que se tiene que $\|\varphi(x, y, z)\|/\varphi_z(x, y, z) = 2(2a)/2z = 2a/z$.

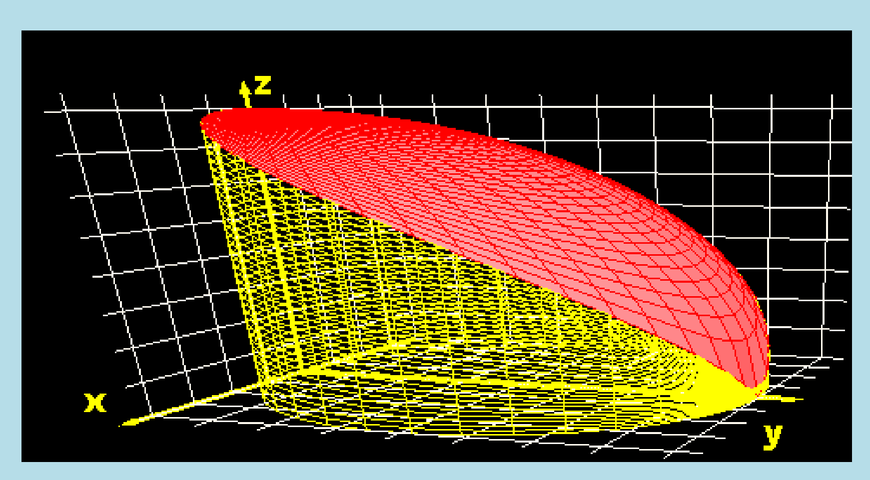


Ilustración 6. La bóveda de Viviani es la superficie esférica roja[xii]

De lo anterior, llamando $\mathcal{R} \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y)\in\mathbb{R}^2: (x-a)^2 + y^2 \leq a^2\}$, sólo resta el cálculo del área, en la siguiente línea.

$$\iint_S dS = \iint_{\mathcal{R}} \frac{\|\nabla\varphi\|}{\varphi_z}dx\,dy = 2a\iint_{\mathcal{R}} \frac{1}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}dxdy = 2(2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\frac{r}{\sqrt{4a^2-r^2}}dr) = 4a^2(\pi-2)$$

El área pedida es, entonces, área $(S) = 4a^2(\pi - 2)$. Observar en la tercera igualdad el pasaje a coordenadas polares y la integración en sólo la mitad del recinto, de allí el factor 2.

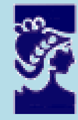
(b) Se trata también de un ejercicio clásico y de suma importancia, del cálculo del flujo de un campo newtoniano La solución es inmediata, por la sencillez del campo que es puramente radial:

[ix] Admitimos conocida la identidad div(rot($\bar{g}$)) = 0, en todo punto del dominio del campo vectorial con matriz hessiana continua $\bar{g}$, dominio que se nos enuncia como $\mathbb{R}^3$. De hecho, el campo vectorial $\bar{g}$ es $C^\infty(\mathbb{R}^3)$, dado que ése es el carácter de su campo de rotores $\bar{h}$. Recomendamos ver (Santaló 1993, 177).

[x] Es importante notar que, si bien el borde de S_1 es la curva C, no estamos obligados a utilizar esa superficie poliédrica, cuando tenemos a mano una mucho más simple, que tiene el mismo borde, esto es S_o, que una porción de un plano. Observamos que las condiciones del Teorema de Stokes se cumplen en este ejercicio, ya que los campos involucrados son (ambos) $C^\infty(\mathbb{R}^3)$, la superficie S_1 admite una parametrización regular, y su borde es una curva que admite una parametrización regular a trozos, con las orientaciones indicadas en la figura.

[xi] La parte operativa de este ejercicio se reduce a multiplicar por 2 el área del triángulo $\mathcal{R}$, mientras que su carga conceptual se asienta en el teorema de Stokes (esto es qué dice, y si lo que dice cae al caso), y el reconocimiento del carácter solenoidal de los campos de rotor suficientemente suaves.

[xii] El problema de la determinación del área de la bóveda de Viviani es muy clásico, se le conoce como *problema florentino*, por Vincenzo Viviani (un discípulo de Galileo, que vivió en Florencia entre 1622 y 1703) que trazó sobre la superficie esférica una ventana cuadrable. Se halla tratado en prácticamente todos los libros de texto, por ejemplo, en (Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo 1968, 84.4, Ejemplo 2, 432). La bóveda también puede definirse en coordenadas esféricas en el primer octante como los puntos para las cuales es $\rho = 2a$, con $0\leq\varphi\leq\theta\leq\pi/2$. Utilizando esta descripción, el problema es trivial y su solución es media línea: ¡hacerla!



$$\iint_S \bar{h}\cdot\check{n}\, dS = k\iint_S \frac{\bar{X}}{r^3}\cdot\frac{\bar{X}}{r}\, dS = k\iint_S \frac{r^2}{r^4} dS = \frac{k}{4a^2}\iint_S dS = \frac{k}{4a^2}\,\text{área}(S) = k(\pi-2)$$

Es importante observar en especial la tercera de las igualdades anteriores, donde se reemplaza r por 2a, puesto que *sobre S*, r es, efectivamente, constante e igual al radio de la esfera[xiii]. El flujo es, entonces, $k(\pi-2)$.

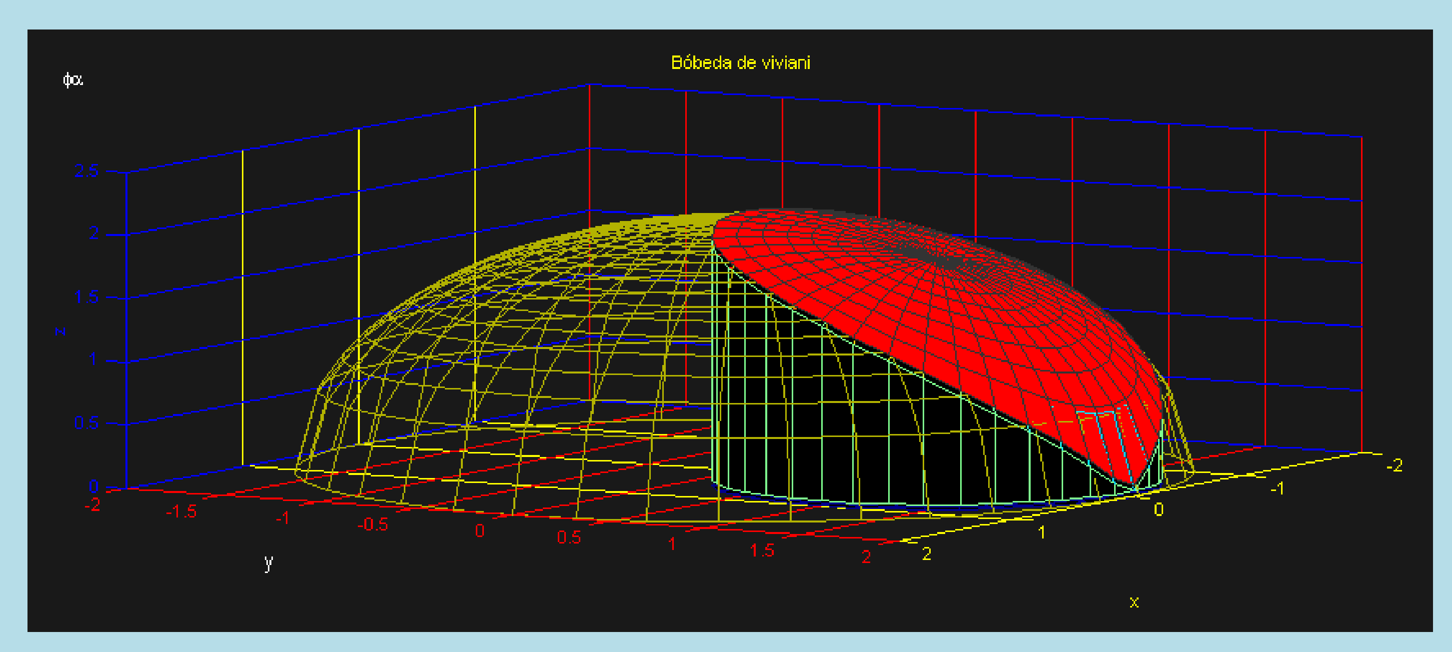


Ilustración 7. La bóveda de Viviani (roja), la esfera (amarilla) y el cilindro (negro)

El gráfico anterior puede resultar más expresivo de lo que estamos calculando, si le añadimos una pequeña flecha en cada punto de la bóveda, que represente el campo vectorial que fluye. Observamos que la norma del campo newtoniano se mantien constante sobre toda la bóveda (su valor es k/a^2), de modo que veremos todas las flechas de igual longitud fluyendo normales a la superficie esférica. Eso muestra la figura siguiente, con un campo azulado. Cambiamos ligeramente el punto de mira para apreciar mejor el prefil de campo fluyente.

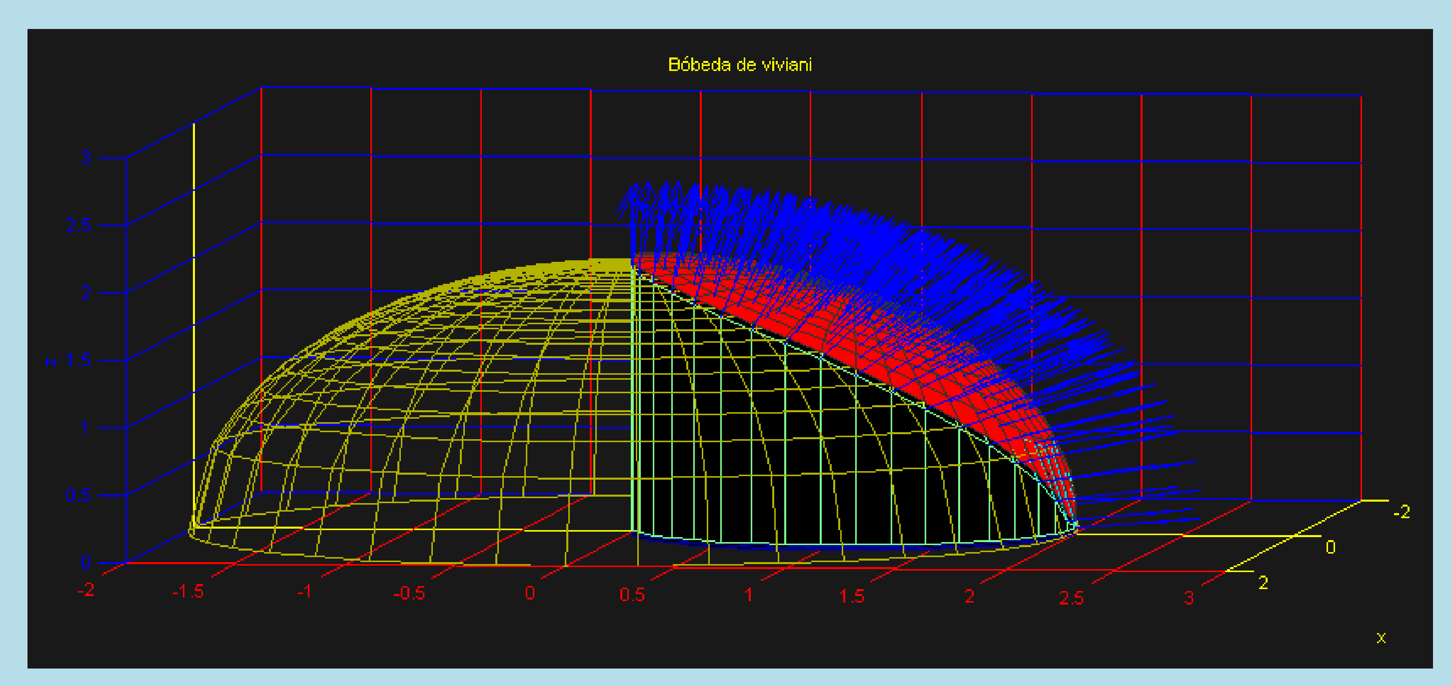
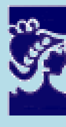


Ilustración 8. El campo que fluye a través de la bóveda

Fin de una resolución de la evaluación integradora del 13 de julio de 2010

[xiii] Este es un ejercicio puro de cálculo: cálculo de área y cálculo de flujo. Sin embargo, requiere sólidos conocimientos conceptuales acerca de los recintos de integración, sistemas de coordenadas, transformación de coordenadas. Los dos apartados son muy clásicos, se encuentran en la mayoría de los textos de cálculo; en particular, la forma del campo tratado en (b) es de importancia capital.



💻 En el primer ejercicio, pueden ayudarse con matlab® así:

Para resolver el pvi, basta que escriban la instrucción:

```
y =dsolve('Dy-(2/x)*y=3','y(1)=0','x')
```

y Matlab responde con la solución

```
y =
-3*x+3*x^2
```

Para resolver la integral basta escribir:

```
int('-3*t^2+3*t',1,2)
```

La respuesta(answer)de Matlab es:

```
ans =
-5/2
```

También matlab puede ayudarles a obtener gráficos que les dé más oportunidades de iluminar la comprensión de los problemas, como lo hace la ilustración 4, por ejemplo.

φα

📖📖📖 Hemos hecho, en esta resolución, referencia a dos muy buenos textos 📖📖📖

Rey Pastor, Julio, Pedro Pi Calleja, y César Trejo. *Análisis Matemático II. Cálculo infinitesimal de varias variables. Aplicaciones*. Séptima edición. Vol. II. III vols. Buenos Aires: Kapelusz, 1968.

Santaló, Luis. *Vectores y tensores con sus aplicaciones*. Décimocuarta edición. Buenos Aires: Eudeba, 1993.